ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est d'établir le résultat suivant : "*Pour toute matrice complexe A, il existe une matrice unitaire U telle que les éléments diagonaux de la matrice UAU^{-1} soient tous égaux.*"

La première et la deuxième partie sont indépendantes ; la troisième partie utilise certains résultats des deux premières.

Notations et rappels

Dans ce problème, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\det A$ son déterminant, χ_A son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne est égal au conjugué $\overline{a_{k,\ell}}$ du complexe $a_{k,\ell}$, pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$; on note aussi A^* la matrice transposée de la matrice $\overline{A}$ ($A^* = {}^t\overline{A}$).

1ère partie
Un peu de géométrie

$\mathbb{R}^2$ est identifié à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $z \longmapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$, de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique. On rappelle que le cercle unité de $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,;\ |z| = 1\}$.

1.1. Question de cours : Donner l'équation réduite d'une ellipse dans un repère orthonormé du plan euclidien ; préciser les coordonnées des foyers et les équations des deux directrices de l'ellipse ainsi que la valeur de son excentricité.

1.2. Soient b et c deux complexes tels que $|b| \neq |c|$; on pose $\lambda := |b|$ et $\mu := |c|$.

1.2.1. Justifier que l'ensemble $E_{\lambda,\mu} := \{\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} \,;\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ est une ellipse dont on donnera une équation réduite.

1.2.2. Soit w un point de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in \mathbb{R}$; reconnaître l'application $\boldsymbol{r}_{w,\varphi} :\ z \mapsto w + e^{i\varphi}(z - w)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1.2.3. Montrer que l'ensemble $E_{b,c} := \{bz + c\overline{z} \,;\ |z| = 1\}$ est une ellipse, centrée à l'origine, image de $E_{\lambda,\mu}$ par une application du type précédent à préciser à l'aide des réels ε et τ tels que $b = \lambda e^{i\varepsilon}$ et $c = \mu e^{i\tau}$.

1.3. Soient b et c deux complexes ; on définit l'application $f :\ z \longmapsto bz + c\overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1.3.1. Vérifier que f est linéaire et montrer qu'elle est injective si, et seulement si, $|b| \neq |c|$.

1.3.2. Si f est injective, justifier que l'image du cercle unité par f est une ellipse de centre 0.

1.3.3. Si f n'est pas injective, montrer que l'image du cercle unité par f est un segment de $\mathbb{C}$, centré en 0, dont on précisera les extrémités.

1.3.4. Montrer alors que, pour tout complexe non nul a, il existe un complexe z_0 de module 1 tel que $\dfrac{bz_0 + c\overline{z_0}}{a}$ soit réel. (*On distinguera les cas f injective et f non injective.*)

2ème partie
Matrices unitaires

Définitions : *une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si $A^*A = I_n$, ce qui revient à dire qu'elle est inversible et son inverse est égal à A^*. L'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathbb{U}(n)$.*

2.1. Donner un exemple simple de matrice unitaire.

2.2. Montrer que si A est unitaire alors $\det A$ est un complexe de module 1.

2.3. Soit $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est un matrice unitaire si, et seulement si, elle est de la forme $= \begin{pmatrix} u & v \\ -\lambda\overline{v} & \lambda\overline{u} \end{pmatrix}$ où u et v sont des complexes tels que $|u|^2 + |v|^2 = 1$ et λ un complexe de module 1.

2.4. Soit $= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour que D soit unitaire.

2.5. Cas des matrices réelles

2.5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que A est unitaire si, et seulement si, elle est orthogonale.

2.5.2. On rappelle qu'une matrice de permutation est une matrice obtenue en permutant les colonnes (ou les lignes) de I_n. Montrer que toute matrice de permutation est unitaire.

2.6. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices complexes à n lignes et une colonne. On le munit de son produit scalaire complexe canonique noté $<.,.>$ et défini par $<X,Y> := X^*\,Y$ où $X^* = {}^t\overline{X}$.

Montrer qu'une matrice A est unitaire si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace hermitien $\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), <.,.>\big)$.

2.7. Montrer que $\mathbb{U}(n)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.8. Compacité de $\mathbb{U}(n)$

2.8.1. Montrer que l'application $A \longmapsto A^*A$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même, est continue.

2.8.2. Montrer que l'application $(a_{i,j}) \longmapsto \|(a_{i,j})\|_2 := \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2\Big)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que vaut $\|A\|_2$ si A est unitaire ?

2.8.3. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{U}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3ème partie
Démonstration du résultat annoncé

3.1. Étude en dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $a_1 \neq a_2$; on pose $U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{} & \overline{u} \end{pmatrix}$ et $UAU^* = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ c_1 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $u = e^{i\beta}\cos\alpha$, $v = e^{i\gamma}\sin\alpha$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3.1.1. Vérifier que U est une matrice unitaire.

3.1.2. Calculer A_1 et A_2 en fonction de a_1, a_2, b, c, α et $\beta - \gamma$.

3.1.3. On pose $t = \cos^2\alpha + p\cos\alpha\sin\alpha$ avec $p = \dfrac{be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)}}{a_1 - a_2}$.

3.1.3.1. Justifier qu'on peut choisir β et γ pour que p soit un réel.

3.1.3.2. Lorsque p est réel, justifier par un théorème à préciser qu'il existe   entre 0 et $\pi/2$ pour lequel $t = 1/2$.

3.1.3.3. En déduire que pour ces choix de p et α, les termes diagonaux de la matrice UAU^* sont égaux. (on pourra vérifier que $A_1 = ta_1 + (1-t)a_2$ et $A_2 = ta_2 + (1-t)a_1$).

3.2. Étude du cas général

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|M\|_\infty = \|(m_{i,j})\|_\infty := \sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$.

3.2.1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application qui à toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, associe $f(M) = \big(m_{i,i} - m_{j,j}\big)$; montrer que f est continue.

3.2.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit g_A l'application de $\mathbb{U}(n)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_A(H) = \|f(HAH^*)\|_\infty.$$

3.2.2.1. Montrer soigneusement que l'application g_A est continue.

3.2.2.2. Montrer que g_A est bornée et **atteint** ses bornes.

Dans la suite, on considère les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $H_0 \in \mathbb{U}(n)$ telles que

$$g_A(H_0) = \inf\{g_A(H)\ ;\ H \in \mathbb{U}(n)\}.$$

3.2.3. On suppose ici que $g_A(H_0) > 0$ (donc $n \geqslant 3$) et on pose $H_0AH_0^* = A' = (a'_{i,j})$; on note i_0 et j_0 des indices tels que $|a'_{i_0,i_0} - a'_{j_0,j_0}| = g_A(H_0) = \sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a'_{i,i} - a'_{j,j}|$; il peut y en avoir d'autres !

3.2.3.1. Montrer qu'on peut supposer, quitte à remplacer H_0 par PH_0 où P est une matrice de permutation à préciser, que $i_0 = 1$ et $j_0 = 2$.

3.2.3.2. On suppose donc que $|a'_{1,1} - a'_{2,2}| = g_A(H_0)$ et on pose $B := (a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Justifier qu'il existe U_0, matrice unitaire d'ordre 2, telle que les coefficients diagonaux de la matrice $U_0BU_0^*$ soient égaux à $\dfrac{a'_{1,1} + a'_{2,2}}{2}$.

3.2.3.3. On pose $U := \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice U est unitaire et montrer que les coefficients diagonaux de la matrice $UA'U^*$ sont les complexes $\dfrac{a'_{1,1} + a'_{2,2}}{2}$, $\dfrac{a'_{1,1} + a'_{2,2}}{2}$, $a'_{3,3}, \ldots, a'_{n,n}$ pris dans cet ordre.

3.2.3.4. La matrice U étant celle définie ci-dessus, montrer que $\|f(UA'U^*)\|_\infty \leqslant \|f(A')\|_\infty$ et que $|x_0 - a'_{i,i}| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$ pour tout $i \in \{3, \dots, n\}$ où $x_0 = \dfrac{a'_{1,1} + a'_{2,2}}{2}$.

3.2.3.5. Montrer qu'il existe une matrice unitaire H, produit d'un nombre fini de matrices unitaires, telle que $\|f(HA'H^*)\|_\infty < \|f(A')\|_\infty$ et trouver une contradiction.

3.2.4. Justifier alors que les coefficients diagonaux de la matrice $H_0 A H_0^*$ sont tous égaux.

FIN DE L'ÉPREUVE